УДК 532.59

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПАРАМЕТРУ БАГАТОМАСШТАБНОГО РОЗВИНЕННЯ

О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий

Показано, що малий параметр, за яким розвинуто розв'язок задачі про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту двох рідких шарів, є коефіцієнтом нелінійності.

It is shown, that the small parameter from the multi-scale solution of the problem of wave-packets propagation along the interface between two fluid layers is the nonlinear coefficient.

В публікаціях [1]-[3] вироблено обґрунтування методологічних нюансів методу багатомасштабних розвинень, яке застосовано до дослідження двошарових системи вигляду "півпростір - півпростір" та "шар - півпростір" до четвертого наближення. Аналогічні результати отримано у системі "шар - шар" до третього наближення [4]-[5] та "півпростір - півпростір" [6]. При цьому згідно методу багатомасштабних розвинень вводився малий параметр для формального розвинення розв'язку в асимптотичний ряд. У даній статті висвітлюється питання про фізичне тлумачення малого параметру.

Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідкого шару $\Omega_1 = \{(x,y,z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h_1 < z < 0)\}$ з густиною ρ_1 та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x,y,z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h_2)\}$ з густиною ρ_2. Швидкості у Ω_j - виражені через градієнт потенціалу φ_j, $j = 1, 2$. Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x,t)$. Враховується сила поверхневого натягу, сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z-напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис. 1).

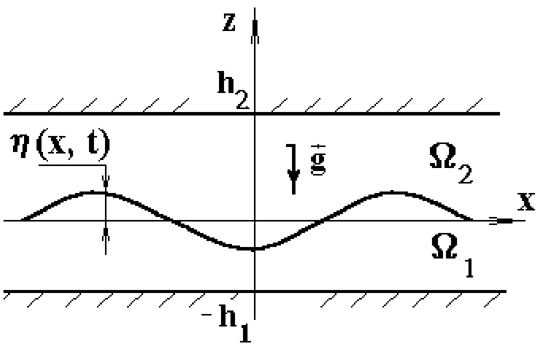

Рис. 1. Постановка задачі.

Математична постановка задачі про розповсюдження хвильових пакетів двох рідких шарів з товщиною h_1 и h_2 має вигляд:

$$\nabla^2\varphi_j \equiv \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad \upsilon_j = \vec{\nabla}\varphi_j \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \text{ при } z = \eta(x,y,z) \tag{2}$$

$$g(1-\frac{\rho_2}{\rho_1})\eta+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+0{,}5\left(\vec{\nabla}\varphi_1\right)^2-0{,}5\left(\vec{\nabla}\varphi_2\right)^2-\frac{T}{\rho_1}\left[1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$$

при $z=\eta(x,y,z)$ (3)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \quad z=-h_1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \quad z=h_2 \tag{5}$$

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини L, максимального відхилення вільної поверхні a, характерного часу $(L/g)^{1/2}$, густини нижньої рідини ρ_1, де g прискорення вільного падіння. Перейдемо до безрозмірних величин за допомогою формул

$$x=Lx^*,\ z=Lz^*,\ t=\sqrt{\frac{L}{g}}t^*,\ \rho_2=\rho_1\rho^*,\ \eta=a\eta^*,\ \varphi=\frac{La}{\sqrt{L/g}}\varphi^*,\ T=L^2\rho_1 gT^* \tag{6}$$

Тоді наша задача в плоскому варіанті буде сформульована слідуючим чином(далі зірочки опущено)

$$\nabla^2\varphi_j\equiv\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2}=0,\ в\quad \Omega_j\quad j=1,2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}=-\alpha\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\ \text{при}\ z=\alpha\eta(x,y,z) \tag{8}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+(1-\rho)\eta+\frac{1}{2}\alpha[\left(\vec{\nabla}\varphi_1\right)^2-\left(\vec{\nabla}\varphi_2\right)^2]-T\left[1+\alpha^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$$

при $z=\alpha\eta(x,y,z)$ (9)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \quad z=-h_1, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \quad z=h_2 \tag{11}$$

Для визначення наближеного розв'язку задачі (7) - (11) для малих, але кінцевих амплітуд, застосуємо метод багатомасштабних розвинень

$$\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\eta_n(x_0,x_1,x_2,x_3,t_0,t_1,t_2,t_3)+O(\alpha^3), \tag{12}$$

$$\varphi_j(x,z,t)=\sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\varphi_{jn}(x_0,x_1,x_2,x_3,z,t_0,t_1,t_2,t_3)+O(\alpha^3),\quad (j=1,2) \tag{13}$$

де $\alpha=\dfrac{a}{L}$ - коефіцієнт нелінійності, $x_i=\alpha^i x,\ t_i=\alpha^i t$- масштабні змінні.

Підставляючи (12)-(13) у (7)-(11) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях α, отримаємо три лінійні задачі. Наприклад задача першого порядку має вигляд

$$\begin{aligned}
&\varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} = 0 \\
&\eta_{1,t_0} - \varphi_{j1,z} = 0 \quad на \quad z = 0 \\
&\varphi_{11,t_0} - \rho\varphi_{21,t_0} + (1-\rho)\eta_1 - T\eta_{1,x_0x_0} = 0 \quad на \quad z = 0 \\
&\varphi_{11,z} = 0 \quad на \quad z = -h_1 \\
&\varphi_{21,z} = 0 \quad на \quad z = h_2
\end{aligned} \tag{14}$$

Ті ж самі лінійні задачі ми одержуємо, якщо в початкову задачу підставити розвинення по формальному малому безрозмірному параметру ε, що визначає різні масштаби $x_n = \varepsilon^n x$, $t_n = \varepsilon^n t$,

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^4), \tag{15}$$

$$\varphi_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^4), \quad (j = 1,2) \tag{16}$$

Таким чином, малий параметр ε, що вводився в подібних задачах формально, набув після переходу до безрозмірних змінних конкретного фізичного змісту, тобто є коефіцієнтом нелінійності.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикладна гідромеханика.- 2002.- Т.4(76), №4.- С.3-13.
2. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы.- 2001. -Вып.17.- С. 58-67.
3. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханика.- 2001.- Т.3(75), №.4.- С.38-46.
4. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка.- 2005.- Т.7 (79), № 1.- С.80-89.
5. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе // Прикладна гідромеханіка.- 2006.- Т.8 (80), № 4.- С.60-65.
6. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface, Trans. ASME. *J.Appl. Mech.*. Ser. E, 43, №4, 1976, pp.584-588.